Varianta 69

SUBIECTUL I

a) $AB = 5\sqrt{2}$.
b) $\cos^2 122 + \sin^2 122 = 1$.
c) $S = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}$.
d) $\bar{z} = -4 + i$
e) $a = 1,\ b = -1$
f) $BC = \sqrt{41}$.

SUBIECTUL II
1.
a) Determinantul este egal cu -20.
b) $p = \dfrac{2}{5}$.
c) $x = \dfrac{1}{2}$.
d) $x = \dfrac{1}{49}$.
e) $E = 1$.
2.
a) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+20)^2}$.
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\dfrac{1}{441}$.
c) $f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.
d) $\int_1^2 f(x)dx = 1 + \ln \dfrac{22}{21}$.
e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{11n - 23}{23n + 11} = \dfrac{11}{23}$.

SUBIECTUL III

a) $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = -2$.
b) Calcul direct.

c) $f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1(f_1(x)) \overset{b)}{=} f((x+1)^2 - 1) \overset{b)}{=} (x+1)^{2^2} - 1$.

d) Fie $P(n): f_n(x) = (x+1)^{2^n} - 1$, n$\in$**N***.

$P(1): f_1(x) = (x+1)^2 - 1$ (A).

Presupunem $P(k)$ (A) şi demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde k≥1.

$P(k): f_k(x) = (x+1)^{2^k} - 1$; $P(k): f_{k+1}(x) = (x+1)^{2^{k+1}} - 1$.

$f_{k+1}(x) = (f_1 \circ f_k)(x) = f_1\left((x+1)^{2^k} - 1\right) = \left((x+1)^{2^k} - 1 + 1\right)^2 - 1 = (x+1)^{2^{k+1}} - 1$.

De unde $P(n)$ este (A) $\forall$n$\in$**N*.**

e) Din **e)**$\Rightarrow f_n(-1) = (-1+1)^{2^n} - 1 = -1$.

f) Dacă $n \in$ **N** $\Rightarrow 2^n$ este număr par$\Rightarrow (x+1)^{2^n} \geq 0 \Rightarrow f_n(x) \geq -1$.

g) Din **f)**$\Rightarrow f_1(x) \geq -1,\ f_2(x) \geq -1,\ f_3(x) \geq -1 \Rightarrow\ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + 3 \geq 0$ cu egalitate pentru $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = -1 \Rightarrow x = -1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi $f'(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

c) Din **b)**$\Rightarrow$ $x = 0$ este punct de minim global $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1,\ \forall x \in$ **R**.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ functia f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$ .Căutăm asimptote oblice: $y = mx + n$; $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}(1 - e^{-x}) = 1$;

$n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow\ \ y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

e) $\int_0^1 f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - e^{-x}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$.

f) Din **c)**$\Rightarrow f(x) \geq 1,\ f(x^2) \geq 1,\ f(x^3) \geq 1$ cu egalitate pentru x=0$\Rightarrow x = 0$ solutie unică.

g) Din **c)**$\Rightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x + e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 - x \Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall x \in$ **R**, cu egalitate pentru x=0. Pentru $x = \frac{1}{2007} \Rightarrow e^{\frac{1}{2007}} < \frac{2007}{2006}$.